#1. Soit $\vec{u} = (1,2)$ et $\vec{v} = (2,1)$

a) À l'aide de la definition **5.12** déterminer si $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$

Definition 5.12 →

DÉFINITION 5.12

Soit V, un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, et $\{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$, un ensemble de n vecteurs de V. L'ensemble $\{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$ des vecteurs est une **base** de V si les deux conditions suivantes sont satisfaites.

1) Les vecteurs $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$ sont linéairement indépendants.
2) $\{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$ est un ensemble de générateurs de V.

1) linéairement indépendant ?

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (1-4) = -3 \neq 0$$

2) ensemble générateurs de V

$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$

$(x,y) = a(1,2) + b(2,1)$

$$\begin{cases} a + 2b = x \\ 2a + b = y \end{cases}$$

$a = x - 2b$

$2(x-2b) + b = y$

$2x - 4b + b = y$

$b = \dfrac{-y+2x}{3}$

$a = x - 2\left(\dfrac{-y+2x}{3}\right) = x + \dfrac{2y-4x}{3}$

$a = \dfrac{2y-x}{3}$

$\vec{w} = \left(\dfrac{2y-x}{3}\right)\vec{u} + \left(\dfrac{2x-y}{3}\right)\vec{v}$

$\{\vec{u}, \vec{v}\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$

b) $\vec{w} = (3,-6)$, $\vec{t} = (-2,3)$, $\vec{r} = (5,10)$ et $\vec{0} = (0,0)$ comme combinaison linéaire $\vec{u}$ et $\vec{v}$

$$\begin{cases} a + 2b = 3 \\ 2a + b = -6 \end{cases}$$

$a = 3 - 2b$

$2(3-2b) + b = -6$

$6 - 4b + b = -6$

$-3b = -12$

$b = 4$

$a + 2b = 3$

$a + 2(4) = 3$

$a + 8 = 3$

$a = -5$

$\vec{w} = -5\vec{u} + 4\vec{v}$

$$\begin{cases} a + 2b = -2 \\ 2a + b = 3 \end{cases}$$

$a = -2 - 2b$

$2(-2-2b) + b = 3$

$-4 - 4b + b = 3$

$-3b = 7$

$b = -\dfrac{7}{3}$

$a = -2 - 2b = -2 - 2(-7/3)$

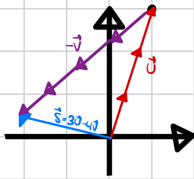
$= -2 + 14/3$

$a = \dfrac{8}{3}$

$\vec{t} = \dfrac{8}{3}\vec{u} - \dfrac{7}{3}\vec{v}$

.....

C) Représenter graphiquement $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{s} = 3\vec{u} - 4\vec{v}$



#2. Soit $\vec{u} = (6,-3)$ et $\vec{v} = (-8,4)$

a) $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$

Étape 1 → linéairement indépendant ?

$$\begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -8 & 4 \end{vmatrix} = 24 - 24 = 0$$ dépendant

b) $\vec{w} = (3,2)$, $\vec{t} = (10,-5)$

$$\begin{cases} 6a - 8b = 3 \\ -3a + 4b = 2 \end{cases}$$

$a = \frac{3+8b}{6}$ $\quad -3\left(\frac{3+8b}{6}\right) + 4b = 2$

$\frac{-3-8b}{2} + 4b = 2$

$-\frac{3}{2} = 2$ Faux

$$\begin{cases} 6a - 8b = 10 \\ -3a + 4b = -5 \end{cases}$$

$a = \frac{8b+10}{6}$ $\quad -3\left(\frac{8b+10}{6}\right) + 4b = -5$

$\left(\frac{-8b-10}{2}\right) + 4b = -5$

$-5 = -5$ Vrai !

#3. Soit $\vec{i} = (1,0)$, $\vec{j} = (0,1)$ et $\vec{v} = (1,1)$

a) déterminer si $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{v}\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$

Étape 1

$a = 1$

$b = 1$

dépendant donc Ø base

b) Déterminer si $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{v}\}$ est un ensemble de générateurs de $\mathbb{R}^2$

$a = 1$

$b = 1$

infinité de solutions

c) $\vec{w} = (4,-5)$ comme combinaison linéaire de $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{v}$

$$\begin{cases} a + c = 4 \\ b + c = -5 \end{cases}$$

$a = 4 - c$

#4.

Soit $\vec{u}=(1,1,1)$, $\vec{v}=(0,1,1)$ et $\vec{k}=(0,0,1)$

a) $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{k}\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$

Étape 1

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix} = 1 \neq 0$$

linéairement indépendant

Étape 2

$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{k}$

$(x,y,z) = a(1,1,1) + b(0,1,1) + c(0,0,1)$

$$\begin{cases} a = x \\ a + b = y \rightarrow b = y - x \\ a + b + c = z \rightarrow c = z - y \end{cases}$$

$\vec{w} = x\vec{u} + (y-x)\vec{v} + (z-y)\vec{k}$

Donc, $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{k}\}$ est une base $\mathbb{R}^3$

b) $\vec{w}=(1,-2,3)$, $\vec{i}=(1,0,0)$ et $\vec{0}=(0,0,0)$ comme combinaison linéaire de $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{k}$

$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{k}$

$$\begin{cases} a = 1 \\ a + b = -2 \rightarrow b = -3 \\ a + b + c = 3 \rightarrow c = 5 \end{cases}$$

$\vec{w} = \vec{u} - 3\vec{v} + 5\vec{k}$

$\vec{i} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{k}$

$$\begin{cases} a = 1 \\ a + b = 0 \rightarrow b = -1 \\ a + b + c = 0 \rightarrow c = 0 \end{cases}$$

$\vec{i} = \vec{u} - \vec{v}$

#5. Soit $\vec{u}=(1,-2,-3)$, $\vec{v}=(2,1,2)$ et $\vec{w}=(5,0,1)$

a) $\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ est une base $\mathbb{R}^3$

Étape 1

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 5 & 0 \end{matrix} = (1-20)-(-4-15) = 0$$ linéairement dépendant

Donc, $\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ n'est pas une base

b) Combinaison linéaire de $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$

i) $\vec{t}=(11,-7,-9)$

$$\begin{cases} a+2b+5c=11 \\ -2a+b=-7 \\ -3a+2b+c=-9 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 11 \\ -2 & 1 & 0 & -7 \\ -3 & 2 & 1 & -9 \end{array}\right] \begin{matrix} L_2+2L_1 \to L_2 \\ L_3+3L_1 \to L_3 \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 11 \\ 0 & 5 & 10 & 15 \\ 0 & 8 & 16 & 24 \end{array}\right] 5L_3-8L_2 \to L_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 11 \\ 0 & 5 & 10 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \text{infinité de solutions}$$

$5b+10s=15$

$b=2s+3$

$a+2(2s+3)+s=11$

$a+4s+6+s=11$

$a=5-5s$

#6. vecteurs suivant est une base de l'espace vectoriel donné

a) $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$, où $\vec{u} = (1,2)$, $\vec{v} = (3,4)$ et $\vec{w} = (4,5)$ pour $\mathbb{R}^2$

Puisque $\dim \mathbb{R}^2 = 2$, les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont linéairement dépendant

b) $\{\vec{u}, \vec{v}\}$, où $\vec{u} = (1,2,4)$ et $\vec{v} = (-1,4,-2)$ pour $\mathbb{R}^3$

Théorème 5.3 → $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, toute autre base doit contenir 3 vecteurs

$\{\vec{u}, \vec{v}\}$ ∅ une base

#7. base de l'espace vectoriel ?

a) $S = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$, où $\vec{u} = (2,1)$, $\vec{v} = (0,1)$ et $\vec{w} = (-8,4)$ pour $\mathbb{R}^2$

$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ $\qquad$ $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -8 & 4 \end{vmatrix} = -8 \neq 0$

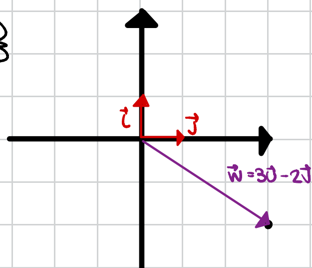
$\{\vec{u}, \vec{v}\}$ $\qquad$ $\{\vec{v}, \vec{w}\}$

c) $S = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{t}\}$ où $\vec{u} = (0,0,1)$, $\vec{v} = (1,1,0)$, $\vec{w} = (1,1,1)$ et $\vec{t} = (1,1,-1)$ pour $\mathbb{R}^3$

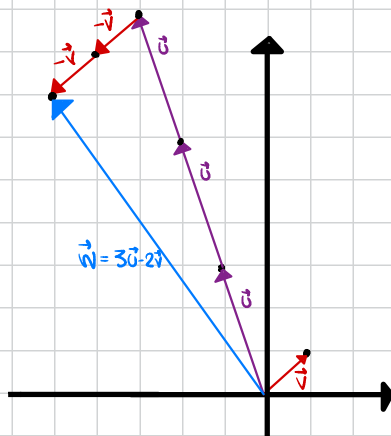
Aucun

#8. Soit $\vec{w} = 3\vec{u} - 2\vec{v}$ où $\vec{u}$ et $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$. Représenter en fonction de vecteur de la base

a) $\{\vec{i}, \vec{j}\}$



b) $\{\vec{u}, \vec{v}\}$, où $\vec{u} = -\vec{i} + 3\vec{j}$ et $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j}$



#11.

a) Faux

b) Vrai

c) Vrai

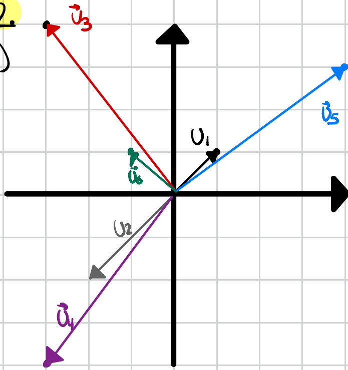
d) Faux

e) Vrai

f) Vrai

#12.

a)



→ $\{\vec{u}_1, \vec{u}_6\}$

→ $\{\vec{u}_2, \vec{u}_6\}$

→ $\{\vec{u}_3, \vec{u}_5\}$

b) Base orthonormées à partir des bases orthogonales trouvées en a)